

MATERI MATEMATIKA PEMINATAN KELAS XII

PERTEMUAN KE-3

Petunjuk:

- 1) Kerjakan soal-soal tersebut di buku matematika peminatan
- 2) Hasil pekerjaan dikumpulkan di sekolah awal bulan September

b. Pemfaktoran

Apabila dengan cara substitusi langsung diperoleh hasil tak tentu (misalkan $\frac{0}{0}$), hasil tersebut bukan nilai limit. Oleh karena itu, fungsi harus disederhanakan terlebih dahulu dengan memanfaatkan identitas trigonometri. Salah satu cara yang dapat digunakan yaitu pemfaktoran. Cara ini digunakan untuk $f(x)$ berupa fungsi rasional (pecahan). Pembilang dan penyebut pada $f(x)$ terdapat faktor yang sama sehingga dapat dihilangkan.

Coba ingat kembali beberapa identitas trigonometri berikut!

1) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

2) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

3) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

4) $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$
 $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
 $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$

5) $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

6) $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$

$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \sin \frac{1}{2}(A - B)$

$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$

$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \sin \frac{1}{2}(A - B)$

Contoh Soal dan Alternatif Penyelesaian

Tentukan nilai limit berikut!

f. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \sin^2 x}{\sin x}$

3. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{\sin 2x}$

Alternatif Penyelesaian

1. Substitusi langsung:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \frac{1 - \cos 0}{\sin^2 0} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0} \text{ (bentuk tak tentu)}$$

Pemfaktoran:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x} && \rightarrow \text{bentuk } \sin^2 x \text{ diubah menjadi } (1 - \cos^2 x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} && \rightarrow \text{bentuk } (1 - \cos^2 x) \text{ difaktorkan } (1 + \cos x)(1 - \cos x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} && \rightarrow \text{bagian } (1 - \cos x) \text{ dihilangkan} \\ &= \frac{1}{1 + \cos 0} && \rightarrow \text{substitusi langsung} \\ &= \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Jadi, nilai $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2}$.

2. Substitusi langsung:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \sin^2 x}{\sin x} = \frac{\sin 2(0) + \sin^2 0}{\sin 0} = \frac{0 + 0}{0} = \frac{0}{0} \text{ (bentuk tak tentu)}$$

Pemfaktoran:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \sin^2 x}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \sin^2 x}{\sin x} && \rightarrow \text{bentuk } \sin 2x = 2 \sin x \cos x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(2 \cos x + \sin x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2 \cos x + \sin x) \\ &= 2 \cos 0 + \sin 0 && \rightarrow \text{substitusi langsung} \\ &= 2(1) + 0 = 2 \end{aligned}$$

Jadi, nilai $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \sin^2 x}{\sin x} = 2$.

3. Substitusi langsung:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{1 + \cos 2(\frac{\pi}{2})}{\sin 2(\frac{\pi}{2})} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0} \text{ (bentuk tak tentu)}$$

Pemfaktoran:

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + (2 \cos^2 x - 1)}{2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos^2 x}{2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1} = 0$$

Jadi, nilai $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{\sin 2x} = 0$.

Uji Kompetensi 5

Nilai

Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini dengan jelas dan tepat!

1. Tentukan nilai $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x - \cos x}$!

Jawab: _____

2. Tentukan nilai $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x + \sin x \cos x}{\cos x}$!

Jawab: _____

3. Tentukan nilai $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos x}{\tan x}$!

Jawab: _____

SELAMAT MENGERJAKAN...